# Quelques aspects de l'étude quantitative de la fonction de comptage et des valeurs propres de matrices aléatoires

Sandrine Dallaporta

Institut de Mathématiques de Toulouse

20 décembre 2012

Apparitions des matrices aléatoires dans différents cadres :

1. statistique multivariée : Wishart (1920).
   $\rightsquigarrow$ étude des propriétés d'un tableau de données statistiques.

2. analyse numérique matricielle : Goldstine et von Neumann (1940).
   $\rightsquigarrow$ étude de l'inversibilité de matrices aléatoires.

3. physique statistique : Wigner (1950).
   $\rightsquigarrow$ modélisation d'opérateurs régissant l'évolution de grands systèmes d'atomes.

On s'intéresse aux propriétés spectrales.

Wigner : étude asymptotique.

On s'intéresse aux propriétés spectrales.

Wigner : étude asymptotique.

**Conjecture (Wigner)**

*Les propriétés asymptotiques des matrices aléatoires sont universel-*
*-les.*

On s'intéresse aux propriétés spectrales.

Wigner : étude asymptotique.

**Conjecture (Wigner)**

*Les propriétés asymptotiques des matrices aléatoires sont universel-
-les.*

$\Longrightarrow$ popularisation des matrices aléatoires.

# Plan de l'exposé

1. Étude asymptotique des matrices aléatoires
   - Modèles étudiés
   - Propriétés globales
   - Propriétés locales
2. Outils
   - Localisation
   - Quatre moments
3. Étude non asymptotique
   - Enjeux
   - Fluctuations de la fonction de comptage
   - Fluctuations des valeurs propres
   - Vitesse de convergence

# Matrices de Wigner

**Définition (Matrices de Wigner)**

*Une matrice aléatoire hermitienne $M_N$ de taille $N$ est une matrice de Wigner si ses coefficients*

- *sont indépendants et identiquement distribués (iid), à la condition de symétrie près ;*
- *ont une moyenne nulle et une variance égale à 1.*

Notation : $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M_N$.

# Matrices de Wigner

**Définition (Matrices de Wigner)**

*Une matrice aléatoire hermitienne $M_N$ de taille $N$ est une matrice de Wigner si ses coefficients*

- *sont indépendants et identiquement distribués (iid), à la condition de symétrie près ;*
- *ont une moyenne nulle et une variance égale à 1.*

Notation : $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M_N$.

$$\Longrightarrow N \text{ valeurs propres réelles } \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N.$$

**Définition (Exemple important de matrices de Wigner)**

*Si $M_N$ est une matrice de Wigner dont les coefficients sont gaussiens complexes, alors $M_N$ appartient à l'ensemble gaussien unitaire (GUE).*

**Définition (Exemple important de matrices de Wigner)**

*Si $M_N$ est une matrice de Wigner dont les coefficients sont gaussiens complexes, alors $M_N$ appartient à l'ensemble gaussien unitaire (GUE).*

Loi invariante par conjugaison par une matrice unitaire.

**Définition (Exemple important de matrices de Wigner)**

*Si $M_N$ est une matrice de Wigner dont les coefficients sont gaussiens complexes, alors $M_N$ appartient à l'ensemble gaussien unitaire (GUE).*

Loi invariante par conjugaison par une matrice unitaire.

$\Longrightarrow$ La loi jointe des valeurs propres est explicitement connue :

$$C_N \mathbb{1}_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N} \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i^2/2} d\lambda_i .$$

# Matrices de covariance

## Définition (Matrice de covariance)

*Si* $X$ *est une matrice de taille* $m \times n$ *dont les coefficients*

- *sont iid ;*
- *ont une moyenne nulle et une variance égale à* $1$*,*

*alors* $S_{m,n} = \frac{1}{m} X^* X$ *est une matrice de covariance.*

Hypothèses : $m \geqslant n$ et $\frac{m}{n} \to \rho \geqslant 1$.

# Matrices de covariance

**Définition (Matrice de covariance)**

*Si $X$ est une matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients*

- *sont iid ;*
- *ont une moyenne nulle et une variance égale à 1,*

*alors $S_{m,n} = \frac{1}{m} X^* X$ est une matrice de covariance.*

Hypothèses : $m \geqslant n$ et $\frac{m}{n} \to \rho \geqslant 1$.

$\Longrightarrow$ $n$ valeurs propres réelles non triviales $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

**Définition (Exemple important de matrices de covariance)**

*Si $X$ a des coefficients gaussiens complexes, $S_{m,n} = \frac{1}{m} X^* X$ appartient à l'ensemble unitaire de Laguerre (LUE).*

**Définition (Exemple important de matrices de covariance)**

*Si $X$ a des coefficients gaussiens complexes, $S_{m,n} = \frac{1}{m} X^* X$ appartient à l'ensemble unitaire de Laguerre (LUE).*

Loi invariante par conjugaison par une matrice unitaire.

**Définition (Exemple important de matrices de covariance)**

*Si $X$ a des coefficients gaussiens complexes, $S_{m,n} = \frac{1}{m} X^* X$ appartient à l'ensemble unitaire de Laguerre (LUE).*

Loi invariante par conjugaison par une matrice unitaire.

$\Longrightarrow$ La loi jointe des valeurs propres est explicitement connue :

$$C_{m,n} \mathbb{1}_{0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{j=1}^{n} e^{-m\lambda_j/2} \lambda_j^{m-n} d\lambda_j .$$

Deux types de propriétés :

- propriété globale : concerne toutes (ou presque toutes) les valeurs propres.
  Exemple : comportement des mesures spectrales empiriques

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j} \quad \text{et} \quad L_{m,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j}.$$

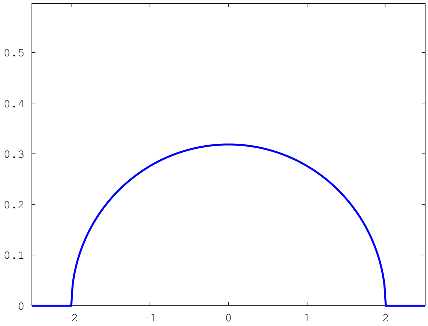
Deux types de propriétés :

- propriété globale : concerne toutes (ou presque toutes) les valeurs propres.
  Exemple : comportement des mesures spectrales empiriques
  $$L_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j} \quad \text{et} \quad L_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j}.$$
- propriété locale : concerne un petit nombre de valeurs propres.
  Exemple : comportement des plus grandes valeurs propres $\lambda_N$ et $\lambda_n$.

# Régime global

## Théorème (Wigner 1958)

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{\lambda_j(W_N)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_{sc} \;\; p.s.$$

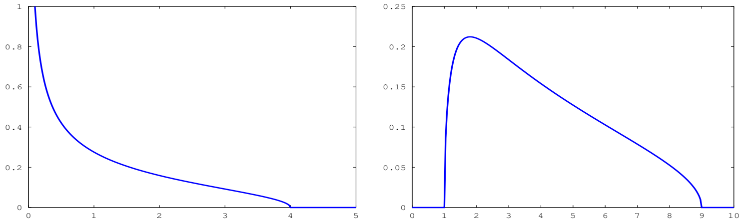



## Loi du demi-cercle

$$d\rho_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)\,dx.$$

## Théorème (Marchenko-Pastur 1967)

$$L_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\lambda_j(S_{m,n})} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mu_{MP}(\rho) \text{ p.s.}$$




## Loi de Marchenko-Pastur

$$d\mu_{MP}(\rho)(x) = \frac{1}{2\pi x}\sqrt{(b_\rho - x)(x-a_\rho)}\,\mathbb{1}_{[a_\rho,b_\rho]}(x)\,dx,$$

où $a_\rho = (1-\sqrt{\rho})^2$ et $b_\rho = (1+\sqrt{\rho})^2$.

## Définition (Fonction de comptage)

*Soit $A$ une matrice de taille $N$ dont les valeurs propres sont réelles.*

$$\mathcal{N}_x(A) = \#\{1 \leqslant j \leqslant N | \lambda_j \leqslant x\}.$$

**Définition (Fonction de comptage)**

*Soit $A$ une matrice de taille $N$ dont les valeurs propres sont réelles.*

$$\mathcal{N}_x(A) = \#\{1 \leqslant j \leqslant N | \lambda_j \leqslant x\}.$$

Loi des grands nombres pour la fonction de comptage :

- pour les matrices de Wigner :

$$\frac{1}{N}\mathcal{N}_x(W_N) \underset{N\to+\infty}{\to} \rho_{sc}((-\infty, x]) \text{ p.s. ;}$$

- pour les matrices de covariance :

$$\frac{1}{n}\mathcal{N}_x(S_{m,n}) \underset{n\to+\infty}{\to} \mu_{MP}(\rho)((-\infty, x]) \text{ p.s.}$$

Méthodes de démonstration classiques pour ces propriétés globales :

- méthode des moments ;
  $\rightsquigarrow$ les moments de la loi spectrale empirique $L_N$ convergent vers ceux de la loi limite $\rho_{sc}$.

Méthodes de démonstration classiques pour ces propriétés globales :

- méthode des moments ;
  $\rightsquigarrow$ les moments de la loi spectrale empirique $L_N$ convergent vers ceux de la loi limite $\rho_{sc}$.

- méthode par transformée de Stieltjes :
  $\rightsquigarrow$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$s_{W_N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda_j - z} \underset{N \to +\infty}{\to} s_{sc}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_{sc}(x)}{x - z} \, dx.$$

# Régime local

Étude des espacements entre valeurs propres, notamment par la probabilité de « trou » :

$$\text{pour } A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\lambda_j \notin A, j = 1 \dots N).$$

# Régime local

Étude des espacements entre valeurs propres, notamment par la probabilité de « trou » :

$$\text{pour } A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\lambda_j \notin A, j = 1 \ldots N).$$

$A = [t, +\infty)$ : comportement de la plus grande valeur propre.

**Théorème (Tracy-Widom 1994 (GUE), Tao-Vu 2010 (Wigner))**

$$N^{2/3}(\lambda_N - 2) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} F_2,$$

*où $F_2$ est la loi de Tracy-Widom.*

Résultat analogue pour la plus petite valeur propre $\lambda_1$.

Résultat analogue pour la plus petite valeur propre $\lambda_1$.

À l'intérieur du spectre, les espacements sont de l'ordre de $\frac{1}{N}$ et régis par le noyau sinus :

$$K_{\sin}(y_1, y_2) = \frac{\sin \pi(y_1 - y_2)}{\pi(y_1 - y_2)}.$$

$\rightsquigarrow$ travaux de Mehta et Gaudin pour le GUE, Erdös-Schlein-Yau *et al.* et Tao-Vu pour le cas général.

Espacement entre deux valeurs propres consécutives : $\lambda_{j+1} - \lambda_j$.

Espacement entre deux valeurs propres consécutives : $\lambda_{j+1} - \lambda_j$.

Position théorique de la $j^{\text{ème}}$ valeur propre : $\gamma_j \in [-2, 2]$ tel que

$$\frac{j}{N} = \int_{-2}^{\gamma_j} d\rho_{sc}(x).$$

**Théorème (Tao 2012)**

*Soit $0 < \eta < 1$. Soit $j$ tel que $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$. Alors*

$$N\rho_{sc}(\gamma_j)(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} P_{Gaudin}.$$

# Schéma classique de démonstration

Cas gaussien (GUE) : calculs explicites possibles.

- loi jointe des valeurs propres ;
- propriétés déterminantales : les valeurs propres du GUE forment un processus déterminantal de noyau

$$K_N(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(x)\psi_j(y),$$

où les $\psi_j$ sont les fonctions harmoniques associées aux polynômes de Hermite.

Extension au cas général : comparaison au cas gaussien.

- méthode des moments (Soshnikov, Péché) ;
- interpolation avec une matrice gaussienne (Johansson) ;
- outils récents de Erdös-Schlein-Yau *et al.* et de Tao-Vu.

Hypothèse technique : les coefficients des matrices considérées ont une décroissance exponentielle.

Travaux de Erdös, Schlein, Yau *et al.* : loi du demi-cercle locale.

$$\mathcal{N}_I \approx N\rho_{sc}(x)|I|$$

pour $I$ intervalle de taille quasiment $\frac{1}{N}$ autour de $x \in (-2, 2)$.

Hypothèse technique : les coefficients des matrices considérées ont une décroissance exponentielle.

Travaux de Erdös, Schlein, Yau *et al.* : loi du demi-cercle locale.

$$\mathcal{N}_I \approx N\rho_{sc}(x)|I|$$

pour $I$ intervalle de taille quasiment $\frac{1}{N}$ autour de $x \in (-2, 2)$.

**Théorème (Erdös-Yau-Yin 2010)**

*Soit $W_N$ une matrice de Wigner normalisée. Alors, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, en notant* $\operatorname{llog} N = \log \log N$,

$$\mathbb{P}\left(|\lambda_j - \gamma_j| \geqslant \frac{(\log N)^{c \operatorname{llog} N}}{\min(j, N+1-j)^{1/3} N^{2/3}}\right) \leqslant C \exp\left(-c'(\log N)^{\operatorname{llog} N}\right).$$

Travaux de Tao et Vu : stratégie de Lindeberg.

Idée : remplacer un à un les coefficients de $M_N$ par ceux de $M'_N$.

Travaux de Tao et Vu : stratégie de Lindeberg.

Idée : remplacer un à un les coefficients de $M_N$ par ceux de $M'_N$.

**Théorème (Tao-Vu 2010-2011)**

*Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que ce qui suit est vrai. Soient $M_N$ and $M'_N$ deux matrices de Wigner dont les coefficients ont les mêmes 4 premiers moments. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse vérifiant :*

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |G^{(j)}(x)| \leqslant N^{c_0}.$$

*Alors, pour tout $1 \leqslant j \leqslant N$ et pour $N$ assez grand,*

$$\left|\mathbb{E}[G(N\lambda_j(W_N))] - \mathbb{E}[G(N\lambda_j(W'_N))]\right| \leqslant N^{-c_0}.$$

# Exemple d'application

$M'_N$ du GUE, $M_N$ matrice de Wigner.

$G$ fonction plateau lisse autour de $I = [a, b]$.

# Exemple d'application

$M'_N$ du GUE, $M_N$ matrice de Wigner.

$G$ fonction plateau lisse autour de $I = [a, b]$.

Notations :

- $I^+ = [a - N^{-c_0/10}, b + N^{-c_0/10}]$
- $I^- = [a + N^{-c_0/10}, b - N^{-c_0/10}]$.

# Exemple d'application

$M'_N$ du GUE, $M_N$ matrice de Wigner.

$G$ fonction plateau lisse autour de $I = [a, b]$.

Notations :

- $I^+ = [a - N^{-c_0/10}, b + N^{-c_0/10}]$
- $I^- = [a + N^{-c_0/10}, b - N^{-c_0/10}]$.

$$\mathbb{P}(\lambda'_j \in \tfrac{1}{N} I^-) - N^{-c_0} \leqslant \mathbb{P}(\lambda_j \in \tfrac{1}{N} I) \leqslant \mathbb{P}(\lambda'_j \in \tfrac{1}{N} I^+) + N^{-c_0}.$$

# Exemple du TCL

Version asymptotique.

**Théorème (central limite)**

*Soient* $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *des variables aléatoires iid de moyenne nulle et de variance* $1$*.*

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} X_j \underset{N\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1).$$

# Exemple du TCL

Version asymptotique.

**Théorème (central limite)**

*Soient* $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *des variables aléatoires iid de moyenne nulle et de variance* $1$.

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} X_j \underset{N \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1).$$

$X_1, \ldots, X_N$ $N$-échantillon.

$S_N$ proche de $\mathcal{N}(0,1)$ ?

Versions non asymptotiques.

**Théorème (Berry-Esseen)**

*Si les $X_j$ ont un troisième moment fini,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(S_N \leqslant x) - \mathbb{P}(G \leqslant x)\right| \leqslant \frac{C\mathbb{E}\left[|X_1|^3\right]}{\sqrt{N}}.$$

Versions non asymptotiques.

**Théorème (Berry-Esseen)**

*Si les $X_j$ ont un troisième moment fini,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(S_N \leqslant x) - \mathbb{P}(G \leqslant x)\right| \leqslant \frac{C\mathbb{E}\left[|X_1|^3\right]}{\sqrt{N}}.$$

Inégalités de déviation : existe-t-il des constantes universelles $C$ et $c$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(|S_N| > x) \leqslant Ce^{-cx^2} \ ?$$

**Définition (Fonction de comptage, rappel)**

*Soit $A$ une matrice de taille $N$ dont les valeurs propres sont réelles.*

$$\mathcal{N}_x(A) = \#\{1 \leqslant j \leqslant N | \lambda_j \leqslant x\}.$$

Loi des grands nombres pour la fonction de comptage :

- pour les matrices de Wigner :

$$\frac{1}{N}\mathcal{N}_x(W_N) \underset{N\to+\infty}{\to} \rho_{sc}((-\infty, x]) \text{ p.s. ;}$$

- pour les matrices de covariance :

$$\frac{1}{n}\mathcal{N}_x(S_{m,n}) \underset{n\to+\infty}{\to} \mu_{MP}(\rho)((-\infty, x]) \text{ p.s.}$$

## Théorème (Gustavsson (GUE) 2005)

*Soit $\delta > 0$. Soit $x \in [-2+\delta, 2-\delta]$. Alors, pour toute matrice du GUE,*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_x(W_N)] = N\rho_{sc}((-\infty, x]) + O\Big(\frac{\log N}{N}\Big),$$

$$\mathrm{Var}\,(\mathcal{N}_x(W_N)) = \frac{1}{2\pi^2}\log N(1+o(1)).$$

*De plus,*

$$\frac{\mathcal{N}_x(W_N) - N\rho_{sc}((-\infty, x])}{\sqrt{\frac{1}{2\pi^2}\log N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

**Théorème (D-Vu 2011)**

*Le résultat précédent est vrai pour des matrices de Wigner dont les 4 premiers moments sont les mêmes que ceux du GUE.*

**Théorème (D-Vu 2011)**

*Le résultat précédent est vrai pour des matrices de Wigner dont les 4 premiers moments sont les mêmes que ceux du GUE.*

Étapes de la démonstration :

- « formule magique »

$$\mathcal{N}_x(W_N) \geqslant k \quad \text{ssi} \quad \lambda_k \leqslant x \ ;$$

**Théorème (D-Vu 2011)**

*Le résultat précédent est vrai pour des matrices de Wigner dont les 4 premiers moments sont les mêmes que ceux du GUE.*

Étapes de la démonstration :

- « formule magique »

$$\mathcal{N}_x(W_N) \geqslant k \quad \text{ssi} \quad \lambda_k \leqslant x \ ;$$

- théorème des quatre moments

$$\mathbb{P}(\lambda'_j \in \tfrac{1}{N} I^-) - N^{-c_0} \leqslant \mathbb{P}(\lambda_j \in \tfrac{1}{N} I) \leqslant \mathbb{P}(\lambda'_j \in \tfrac{1}{N} I^+) + N^{-c_0} \ ;$$

**Théorème (D-Vu 2011)**

*Le résultat précédent est vrai pour des matrices de Wigner dont les 4 premiers moments sont les mêmes que ceux du GUE.*

Étapes de la démonstration :

- « formule magique »

$$\mathcal{N}_x(W_N) \geqslant k \quad \text{ssi} \quad \lambda_k \leqslant x \ ;$$

- théorème des quatre moments

$$\mathbb{P}(\lambda'_j \in \tfrac{1}{N} I^-) - N^{-c_0} \leqslant \mathbb{P}(\lambda_j \in \tfrac{1}{N} I) \leqslant \mathbb{P}(\lambda'_j \in \tfrac{1}{N} I^+) + N^{-c_0} \ ;$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathcal{N}_x(W_N) - N\rho_{sc}((-\infty, x])}{\sqrt{\frac{1}{2\pi^2}\log N}} \underset{N\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1).$$

- avec $A_j = \mathbb{1}_{\lambda_j \leqslant x}$,

$$|\mathcal{N}_x(W_N) - \mathcal{N}_x(W_N')| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A_j']|.$$

- avec $A_j = \mathbb{1}_{\lambda_j \leqslant x}$,

$$|\mathcal{N}_x(W_N) - \mathcal{N}_x(W'_N)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|.$$

- pour $j$ tel que $\gamma_j$ « loin » de $x$,
  théorème de localisation $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|$ très petit.

- avec $A_j = \mathbb{1}_{\lambda_j \leqslant x}$,

$$|\mathcal{N}_x(W_N) - \mathcal{N}_x(W'_N)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|.$$

- pour $j$ tel que $\gamma_j$ « loin » de $x$,

  théorème de localisation $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|$ très petit.

- pour les autres $j$,

  théorème des 4 moments $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]| \leqslant N^{-c_0}$.

- avec $A_j = \mathbb{1}_{\lambda_j \leqslant x}$,

$$|\mathcal{N}_x(W_N) - \mathcal{N}_x(W'_N)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|.$$

- pour $j$ tel que $\gamma_j$ « loin » de $x$,

  théorème de localisation $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|$ très petit.

- pour les autres $j$,

  théorème des 4 moments $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]| \leqslant N^{-c_0}$.

- De plus,

  définition des $\gamma_j \Rightarrow$ au plus $(\log N)^{c \operatorname{llog} N}$ tels indices.

- avec $A_j = \mathbb{1}_{\lambda_j \leqslant x}$,

$$|\mathcal{N}_x(W_N) - \mathcal{N}_x(W'_N)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|.$$

- pour $j$ tel que $\gamma_j$ « loin » de $x$,

  théorème de localisation $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]|$ très petit.

- pour les autres $j$,

  théorème des 4 moments $\Rightarrow |\mathbb{E}[A_j] - \mathbb{E}[A'_j]| \leqslant N^{-c_0}$.

- De plus,

  définition des $\gamma_j \Rightarrow$ au plus $(\log N)^{c \operatorname{llog} N}$ tels indices.

$$\Rightarrow |\mathcal{N}_x(W_N) - \mathcal{N}_x(W'_N)| = o(1).$$

**Théorème (Tracy-Widom (GUE) 1994, Tao-Vu (Wigner) 2010)**

$$N^{2/3}(\lambda_N - 2) \underset{N \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} F_2,$$

*où $F_2$ est la loi de Tracy-Widom.*

$$\Longrightarrow \text{Var}(\lambda_N) \text{ de l'ordre de } N^{-4/3}.$$

**Théorème (Tracy-Widom (GUE) 1994, Tao-Vu (Wigner) 2010)**

$$N^{2/3}(\lambda_N - 2) \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} F_2,$$

*où $F_2$ est la loi de Tracy-Widom.*

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(\lambda_N) \text{ de l'ordre de } N^{-4/3}.$$

**Théorème (Gustavsson (GUE) 2005, Tao-Vu (Wigner) 2011)**

*Soit $0 < \eta < 1$. Pour tout $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$,*

$$\frac{\lambda_j - \gamma_j}{\sqrt{\frac{2\log N}{(4-\gamma_j^2)N^2}}} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Var}(\lambda_j) \text{ de l'ordre de } \frac{\log N}{N^2}.$$

## Théorème (D 2012)

*Pour tout* $0 < \eta \leqslant \frac{1}{2}$, *il existe une constante* $C(\eta) > 0$ *telle que, pour tout* $N \geqslant 2$ *et pour tout* $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$,

$$\mathrm{Var}(\lambda_j) \leqslant C(\eta)\frac{\log N}{N^2}.$$

## Théorème (D 2012)

*Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $N \geqslant 1$,

$$\mathrm{Var}(\lambda_N) \leqslant C N^{-4/3}.$$

# Cas gaussien

Considérons la fonction de comptage $\mathcal{N}_t$.

# Cas gaussien

Considérons la fonction de comptage $\mathcal{N}_t$.

- propriétés déterminantales $\Rightarrow$ $\mathcal{N}_t$ a la même loi qu'une somme de Bernoulli indépendantes.

# Cas gaussien

Considérons la fonction de comptage $\mathcal{N}_t$.

- propriétés déterminantales $\Rightarrow \mathcal{N}_t$ a la même loi qu'une somme de Bernoulli indépendantes.
- inégalité de Bernstein

# Cas gaussien

Considérons la fonction de comptage $\mathcal{N}_t$.

- propriétés déterminantales $\Rightarrow$ $\mathcal{N}_t$ a la même loi qu'une somme de Bernoulli indépendantes.
- inégalité de Bernstein
- borne sur $\mathrm{Var}(\mathcal{N}_t)$ établie par Gustavsson :

$$\sup_{-2+\delta \leqslant t \leqslant 2-\delta} \mathrm{Var}(\mathcal{N}_t) \leqslant c_\delta \log N.$$

# Cas gaussien

Considérons la fonction de comptage $\mathcal{N}_t$.

- propriétés déterminantales $\Rightarrow$ $\mathcal{N}_t$ a la même loi qu'une somme de Bernoulli indépendantes.
- inégalité de Bernstein
- borne sur $\mathrm{Var}(\mathcal{N}_t)$ établie par Gustavsson :

$$\sup_{-2+\delta\leqslant t\leqslant 2-\delta} \mathrm{Var}(\mathcal{N}_t) \leqslant c_\delta \log N.$$

Pour tout $u \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\Big(|\mathcal{N}_t - N\rho_{sc}((-\infty,t])| \geqslant u + C\Big) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{u^2}{c\log N + u}\Big).$$

**Proposition (Inégalité de déviation pour $\lambda_j$)**

*Il existe $C > 0$, $C' > 0$, $c > 0$ et $c' > 0$ (dépendant uniquement de $\eta$) telles que, pour tout $c \leqslant u \leqslant c'N$,*

$$\mathbb{P}\Big(|\lambda_j - \gamma_j| \geqslant \frac{u}{N}\Big) \leqslant 4\exp\Big(-\frac{C^2u^2}{C'\log N + Cu}\Big).$$

**Proposition (Inégalité de déviation pour $\lambda_j$)**

*Il existe $C > 0$, $C' > 0$, $c > 0$ et $c' > 0$ (dépendant uniquement de $\eta$) telles que, pour tout $c \leqslant u \leqslant c'N$,*

$$\mathbb{P}\Big(|\lambda_j - \gamma_j| \geqslant \frac{u}{N}\Big) \leqslant 4\exp\Big(-\frac{C^2u^2}{C'\log N + Cu}\Big).$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\big[(\lambda_j - \gamma_j)^2\big] \leqslant C(\eta)\frac{\log N}{N^2}.$$

# Cas non gaussien

Supposons qu'on puisse appliquer le théorème des 4 moments avec la fonction $G : x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

$$\left|\mathbb{E}[(\lambda_j - \gamma_j)^2] - \mathbb{E}[(\lambda'_j - \gamma_j)^2]\right| \leqslant N^{-2-c_0}.$$

# Cas non gaussien

Supposons qu'on puisse appliquer le théorème des 4 moments avec la fonction $G : x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

$$\left|\mathbb{E}[(\lambda_j - \gamma_j)^2] - \mathbb{E}[(\lambda_j' - \gamma_j)^2]\right| \leqslant N^{-2-c_0}.$$

Mais $G$ ne satisfait pas les hypothèses sur les dérivées.

# Cas non gaussien

Supposons qu'on puisse appliquer le théorème des 4 moments avec la fonction $G : x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

$$\left|\mathbb{E}[(\lambda_j - \gamma_j)^2] - \mathbb{E}[(\lambda_j' - \gamma_j)^2]\right| \leqslant N^{-2-c_0}.$$

Mais $G$ ne satisfait pas les hypothèses sur les dérivées.

- On prend $\tilde{G}$ une approximation lisse de $G$ : proche de $G$ autour de $N\gamma_j$, 0 loin de $N\gamma_j$.

# Cas non gaussien

Supposons qu'on puisse appliquer le théorème des 4 moments avec la fonction $G : x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

$$\left|\mathbb{E}[(\lambda_j - \gamma_j)^2] - \mathbb{E}[(\lambda'_j - \gamma_j)^2]\right| \leqslant N^{-2-c_0}.$$

Mais $G$ ne satisfait pas les hypothèses sur les dérivées.

- On prend $\tilde{G}$ une approximation lisse de $G$ : proche de $G$ autour de $N\gamma_j$, 0 loin de $N\gamma_j$.
- contrôle de l'erreur grâce au théorème de localisation.

# Cas non gaussien

Supposons qu'on puisse appliquer le théorème des 4 moments avec la fonction $G : x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

$$\left|\mathbb{E}[(\lambda_j - \gamma_j)^2] - \mathbb{E}[(\lambda_j' - \gamma_j)^2]\right| \leqslant N^{-2-c_0}.$$

Mais $G$ ne satisfait pas les hypothèses sur les dérivées.

- On prend $\tilde{G}$ une approximation lisse de $G$ : proche de $G$ autour de $N\gamma_j$, 0 loin de $N\gamma_j$.
- contrôle de l'erreur grâce au théorème de localisation.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[(\lambda_j - \gamma_j)^2\right] \leqslant C(\eta)\frac{\log N}{N^2}.$$

**Théorème (Rappel)**

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j(W_N)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_{sc} \ p.s.$$

Vitesse de convergence ?

$$d_K(L_N, \rho_{sc}) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \tfrac{1}{N}\mathcal{N}_x(W_N) - \int_{-\infty}^{x} \rho_{sc}(y)\, dy \right|.$$

**Théorème (Rappel)**

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{\lambda_j(W_N)} \underset{N\to+\infty}{\to} \rho_{sc} \ p.s.$$

Vitesse de convergence ?

$$d_K(L_N,\rho_{sc}) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\tfrac{1}{N}\mathcal{N}_x(W_N) - \int_{-\infty}^{x}\rho_{sc}(y)\,dy\Big|.$$

**Théorème (Götze-Tikhomirov 2012)**

$$\mathbb{E}\big[d_K(L_N,\rho_{sc})\big] \leqslant \frac{(\log N)^C}{N}.$$

Autre distance étudiée :

$$W_2(L_N, \rho_{sc}) = \inf \left( \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^2 \, d\pi(x,y) \right)^{1/2},$$

$\pi$ probabilité sur $\mathbb{R}^2$ de marginales $L_N$ et $\rho_{sc}$.

**Théorème (D 2012)**

$$\mathbb{E}\left[W_2^2(L_N, \rho_{sc})\right] \leqslant C \frac{\log N}{N^2}.$$

Autre distance étudiée :

$$W_2(L_N, \rho_{sc}) = \inf \left( \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^2 \, d\pi(x,y) \right)^{1/2},$$

$\pi$ probabilité sur $\mathbb{R}^2$ de marginales $L_N$ et $\rho_{sc}$.

**Théorème (D 2012)**

$$\mathbb{E}\left[W_2^2(L_N, \rho_{sc})\right] \leqslant C \frac{\log N}{N^2}.$$

En effet :

$$W_2^2(\mu_N, \rho_{sc}) \leqslant \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - \gamma_j)^2 + \frac{C}{N^2} \text{ p.s.}$$

# Perspectives

- Obtenir des inégalités de déviation du bon ordre pour les valeurs propres : $\mathbb{P}(|\lambda_j - \gamma_j| > \frac{u}{N})$ dans le cas où $u$ est petit.
- Établir des bornes sur la variance de valeurs propres pour d'autres modèles : matrices à bandes, $\beta$-ensembles ?
- Établir un lien entre le comportement des statistiques linéaires pour des fonctions de test lisses $\sum \varphi(\lambda_j)$ et celui de la fonction de comptage.

Merci pour votre attention !